

PENYEBAB KESULITAN MAHASISWA DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Ilham Minggu, Darwing Paduppai, dan Said Fachry Assagaf

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar

Jalan Daeng Tata Raya, Kampus Parangtambung UNM, Makassar

email: ilhamminggi@gmail.com

Abstrak: Cause Difficulties Students in Mathematical Proof. This study aims at investigating causes of difficulties in mathematical proof on students at Mathematics Study Program UNM Makassar. It is an explorative research in order to explore the causes of difficulties in mathematical proof qualitatively. As the result, we found two categories as the causes of students difficulties in mathematical proof : (1) the lack of understanding of mathematical proof. (2) the lack of concept and mathematical principles.

Abstrak: Penyebab Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematika. Penelitian ini bertujuan untuk menginvestigasi penyebab kesulitan pembuktian matematika mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika UNM Makassar. Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif yang bertujuan untuk mengeksplorasi penyebab kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, secara kualitatif. Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA UNM Makassar. Hasil penelitian ini menunjukkan terdapat dua kategori penyebab kesulitan mahasiswa dalam Pembuktian Matematika, yaitu: (1) kurangnya pemahaman tentang bukti matematika, (2) kurangnya pemahaman konsep dan prinsip matematika.

Kata kunci: penyebab kesulitan, pembelajaran, pembuktian matematika

Hasil pengamatan penulis, khususnya selama mengajarkan mata kuliah Analisis Real, umumnya mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengembangkan gagasan pembuktian. Membuktikan teorema atau pernyataan yang akan dibuktikan, termasuk merencanakan strategi pembuktian, menentukan “target” pembuktian, baik pada bukti langsung maupun pada bukti tak langsung. Hal ini juga terjadi dalam hampir semua matakuliah yang diikuti mahasiswa. Hasil wawancara penulis dengan beberapa dosen menunjukkan bahwa mahasiswa menunjukkan sulitnya membuktikan, sebagai contoh, para mahasiswa mengetahui bahwa notasi yang digunakan tidak dikenal atau tidak dapat dipahami, atau mereka tidak dapat memulai atau tidak mengetahui bagaimana memulai mengkonstruksi bukti. Masalah yang lebih problematik adalah bahwa kesulitan membuktikan terkait dengan atribut-atribut bukti misalnya apakah suatu bukti yang valid, apakah bukti dapat diterima oleh dosen atau tidak. Padahal, salah satu kemampuan yang diharapkan dari seorang mahasiswa adalah ke-

mampuan memproduksi bukti matematika sebagai dari kemampuan bernalar secara umum

Dalam penelitian sebelumnya (Ilham dan Sabri, 2014) ditemukan beberapa kategori kesulitan pembuktian matematika, diantaranya: kesulitan pemahaman notasi matematika, kesulitan mengembangkan strategi pembuktian, dan kesulitan komunikasi bukti matematika.

Melihat rendahnya kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematika, maka perlu diketahui penyebab kesulitan tersebut. Karena itu perlu diperoleh data akurat penyebab kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika. Hal ini penting untuk merancang pembelajaran bukti matematika secara efektif

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif yang bertujuan untuk mengeksplorasi penyebab kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, secara kualitatif. Penelitian ini

akan dilaksanakan di Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA UNM Makassar

Subjek penelitian ini adalah mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika yang telah mengikuti perkuliahan yang berorientasi pembuktian matematika seperti, matakuliah pengantar Dasar matematika, Aljabar Linear, atau Analisis Real. Subjek diambil dari beberapa peserta/mahasiswa yang mengikuti matakuliah berorientasi pembuktian, kemudian hasil pekerjaan subjek dianalisis

Instrumen penelitian adalah peneliti sendiri dan tes kemampuan pembuktian matematika. Peneliti sebagai instrument menjaring data kualitatif, sedangkan tes kemampuan pembuktian matematika diberikan untuk menjaring data kualitatif aspek-aspek kesulitan mahasiswa dalam proses pembuktian.

Peneliti sebagai instrumen penelitian juga merupakan perencana, pelaksana pengumpul data, penganalisis, penafsir data, dan akhirnya menjadi pelapor hasil penelitian. Peneliti sebagai instrumen akan mempermudah menggali informasi yang menarik meliputi informasi: lain dari yang lain, yang tidak direncanakan sebelumnya, yang tidak diduga terlebih dahulu atau yang tidak lazim terjadi. Tugas diberikan kepada subjek untuk dikerjakan subjek sehingga diperoleh data kesulitan pembuktian.

Pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan melalui tes. Hasil tes akan menunjukkan data jenis-jenis penyebab kesulitan mahasiswa yang kemudian dipelajari melalui interpretasi atau representasi yang diberikan subjek dalam menjawab pertanyaan-pertanyaan dalam tes tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari analisis induktif, ditemukan dua kategori penyebab kesulitan mahasiswa dalam membuktikan pernyataan dalam matematika. Kedua kategori tersebut adalah: (1) pemahaman tentang bukti matematika, dan (2) pemahaman konsep dan prinsip matematika.

Pemahaman tentang Bukti Matematika

Mahasiswa ternyata mengalami kesulitan dalam memahami apa sebenarnya bukti dalam matematika. Meskipun bukti heuristik dengan bantuan perangkat lunak komputer

sekarang sudah mulai diterima dalam matematika, meskipun masih dalam perdebatan tentang keabsahan jika ditinjau dari berbagai kaidah logika dengan sistem deduktif aksiomatik masih mendominasi diskusi tentang pembuktian dalam matematika.

Beberapa mahasiswa masih memandang hal membuktikan suatu pernyataan dalam matematika cukup dengan memberikan atau menunjukkan keberlakuan pernyataan tersebut dalam satu kasus atau contoh.

Pada ilustrasi hasil kerja di bawah ini, tampak bahwa mahasiswa mencoba membuktikan kesamaan (identitas) trigonometri melalui penggantian variabel x dengan nilai 2. Meskipun, kelihatan bahwa mahasiswa yang bersangkutan gagal melanjutkan bukti dengan tepat untuk menunjukkan bahwa penggantian tersebut menghasilkan kesamaan yang benar. Mahasiswa yang bersangkutan berhenti setelah menuliskan 64,16 sebagai hasil dari $\arcsin 0,9$.

Handwritten student work showing an attempt to prove the identity $\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \arccot \frac{2x}{1-x^2} = \arctan \frac{1}{x}$ by substituting $x=2$. The student calculates $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$ and $\arccot \frac{4}{-3}$, then incorrectly calculates the sum as 64.16.

Handwritten student work showing an attempt to prove the identity $\sin^{-1} x + \cot^{-1} 2x = \tan^{-1} \frac{1}{x}$ by substituting $x=2$. The student calculates $\sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$ and $\cot^{-1} \frac{4}{-3}$, then incorrectly calculates the sum as 64.16.

Pemahaman yang sempit tentang bukti matematika sebagai suatu hal yang cukup

dengan mengambil kasus khusus memang kadang-kadang mengarahkan pada hal yang kelihatan sangat jelas kebenarannya. Hal ini yang mengarahkan mahasiswa untuk merasa cukup bahwa pengambilan kasus tertentu sudah menjadi bukti untuk pernyataan yang nyatanya berlaku untuk tak berhingga banyaknya kasus. Dalam ilustrasi di bawah ini, pada saat ingin membuktikan kesamaan dua integral tentu, mahasiswa hanya mengambil a dan b masing-masing bernilai 1, dan setelah mensubstitusikan nilai tersebut, diperoleh dua integral tentu yang jelas sekali bernilai sama.

Bagaimanapun, belum ada kejelasan apakah mahasiswa melakukan itu karena memang mereka memahami bukti matematika secara sederhana sebagai penunjukan satu atau beberapa kasus yang benar atau karena ketidakcukupan waktu bagi mereka untuk memberikan bukti yang berlaku secara umum.

Masih terkait dengan pengambilan kasus untuk pembuktian, terdapat juga maha-

4) Jika a dan b bilangan nil positif - buktikan bahwa

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

Jawaban : a dan b adalah bilangan nil positif

Misalkan $a = 2$ $b = 3$ $a \neq b$

dan ditanyakan

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 (1-3x+3x^2-x^3) dx = \int_0^1 x^3 (1-2x+x^2) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5 dx = \int_0^1 x^3 - 2x^4 + x^5 dx$$

Karena integral dari ruas kiri dan ruas kanan tidak sama, maka

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx \neq \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

siswa yang terkecoh dengan tampilan yang tidak sama dan berkesimpulan bahwa kedua hal yang dibandingkan tersebut tidak sama. Pemahaman mahasiswa tentang pembuktian kesamaan mengalami masalah karena mereka ternyata belum sampai memaknai bahwa hal yang pokok dalam membuktikan kesamaan adalah membuktikan kesamaan nilai, bukan kesamaan bentuk. Integral boleh berbeda, tetapi kesamaan integral tentu menyangkut nilai, bukan bentuk.

Data pada ilustrasi di atas sesungguhnya bisa dikaitkan dengan pembuktian kesalahan suatu pernyataan. Seandainya soal yang diberikan berupa perintah untuk memperjelas kebenaran suatu pernyataan, maka langkah pengambilan kasus yang menghasilkan kesamaan yang bernilai salah akan cukup. Sayangnya, soal di atas meminta mahasiswa membuktikan bahwa kedua integral tersebut bernilai sama (pernyataan bernilai benar).

Pemahaman Konsep dan Prinsip Matematika

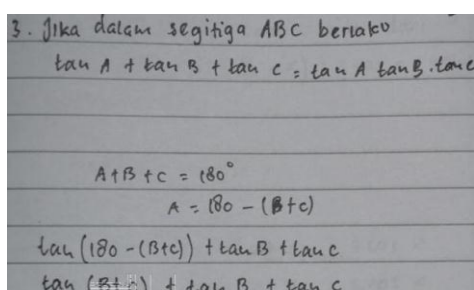
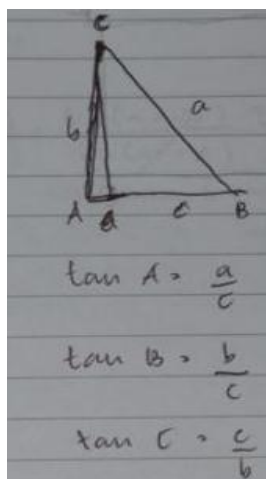
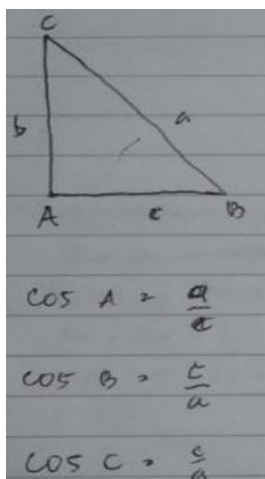
Kendala paling besar yang dihadapi mahasiswa dalam pembuktian adalah pemahaman mereka tentang aturan, hukum, kaidah, atau bentuk prinsip matematika lainnya. Mereka mengalami kesulitan dalam menentukan konteks penggunaan suatu prinsip, sedemikian sehingga sejumlah perampatan atau generalisasi dilakukan secara tidak benar. Kesulitan semacam ini berakibat fatal dalam proses pembuktian. Biasanya, mereka terdorong oleh arah bukti yang sudah mereka tentukan dan menemukan bahwa dengan menerapkan prinsip tertentu, arah itu lebih mudah dicapai. Sayangnya, penerapan yang dilakukan tidak benar karena di luar konteks dimana prinsip tersebut bisa diberlakukan.

Mahasiswa menunjukkan keanehan berpikir hingga menghasilkan pemisalan yang juga aneh sebagaimana dapat diamati dalam ilustrasi di samping. Perbandingan trigonometri $\tan A$ dan $\cos A$ dibuat berdasarkan generalisasi dari nilai trigonometri sudut lain lainnya yang seakan-akan memiliki sifat serupa.

Mahasiswa juga mengalami kesulitan dalam memahami hubungan-hubungan sederhana, misalnya, dalam trigonometri. Beberapa kasus yang ditemukan adalah sebagai berikut.

$$\tan (180 - (A + B)) = \tan (A + B).$$

Seharusnya, $\tan (180 - (A + B)) = -\tan (A + B).$



$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

$$\int_0^1 x^a (1^b - b x (1-x)^{b-1}) dx = \int_0^1 x^b (1^a - a x (1-x)^{a-1}) dx$$

$$\int_0^1 x^{a+b} - b x^{a+b-1} dx = \int_0^1 x^{a+b} - a x^{a+b-1} dx$$

Merampatkan penjabaran $(a - b)^2$ menjadi bentuk umum untuk $(a - b)^n$, yang seharusnya menggunakan prinsip ekspansi binomial, $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n a^{n-i} b^i$

Distribusi pangkat terhadap penjumlahan. Penyamaan penyebut fungsi rasional dalam ekspresi trigonometri dan penyamaan antara $\sin \frac{a}{b}$ dan $\frac{\sin a}{b}$.

Sejumlah kajian telah menemukan penyebab dari kesulitan mahasiswa dalam pem-

buktian, yaitu, kurangnya pemahaman mereka tentang teorema atau konsep dan mereka salah menerapkan konsep atau teorema secara sistematis (lihat Harel, 1999). Mengenali fakta atau toerema belum menjamin bahwa seseorang mampu menerapkannya dengan benar (Weber, 2001).

Buktikan bahwa $(-1 + \sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} + (2 - \sqrt{5}) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} - 2 \right) = 0$

Bukti:

$$(-1 + \sqrt{5}) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} + (2 - \sqrt{5}) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} - 2 \right) = 0$$

$$(-1 + \sqrt{5})^2 \left[\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \right)^2 + (2 - \sqrt{5})^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \right)^2 - 2 \right] = 0$$

$$(1 - 2\sqrt{5} + 5) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} + (9 - 6\sqrt{5} + 5) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \right) - 4 \right) = 0$$

Berbagai kesalahan yang ditunjukkan mahasiswa dalam penelitian ini memperkuat pendapat Weber. Banyak mahasiswa yang sebenarnya sudah mengenali sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan. Akan tetapi, pengenalan itu tidak mampu mencegah mereka untuk merampatkan sifat distribusi pada konteks yang sama sekali tidak tepat. Bahkan, begitu kurang reflektifnya mahasiswa terhadap langkah yang ditempuh dalam pembuktian sehingga beberapa dari mereka malah menampilkan operasi-operasi yang tidak masuk akal (Harel, 1998).

SIMPULAN

Hasil penelitian ini menunjukkan terdapat dua kategori kesulitan mahasiswa dalam membuktikan pernyataan dalam matematika. Keempat kategori tersebut adalah: (1) kurangnya pemahaman tentang bukti matematika, dan (2) kurangnya pemahaman konsep dan prinsip matematika.

Hasil penelitian ini menunjukkan perlunya dosen prodi pendidikan matematika (1) mengajarkan dengan baik konsep dan prinsip-prinsip matematika, konsep dan prosedur bukti yang benar dan (2) mendorong mahasiswa menggunakan prosedur pembuktian matematika yang benar, dan tidak bertumpu pada cara-cara pembuktian yang tidak valid.

DAFTAR PUSTAKA

Harel, G. 1998. Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching. *The*

American Mathematical Monthly, 105: 497-507.

- Harel, G. 1999. Students' Understanding of Proofs: A Historical Analysis and Implications for the Teaching of Geometry and Linear Algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 601-613.
- Ilham dan Sabri. 2014. Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematika. *Laporan Penelitian*. Makassar: Lemlit UNM.
- Sabri. 2003. Prospective Secondary School Teachers' Conceptions of Mathematical Proof in Indonesia. *Tesis*. Perth: Curtin University of Technology.
- Selden, A. & Selden J. 2011. Mathematical and Non-mathematical University Students' Proving Difficulties. Dalam Wiest, L. R., & Lamberg, T. (Eds.) *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, NV: University of Nevada, Reno.
- Weber, K. 2001. Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48:101–119.